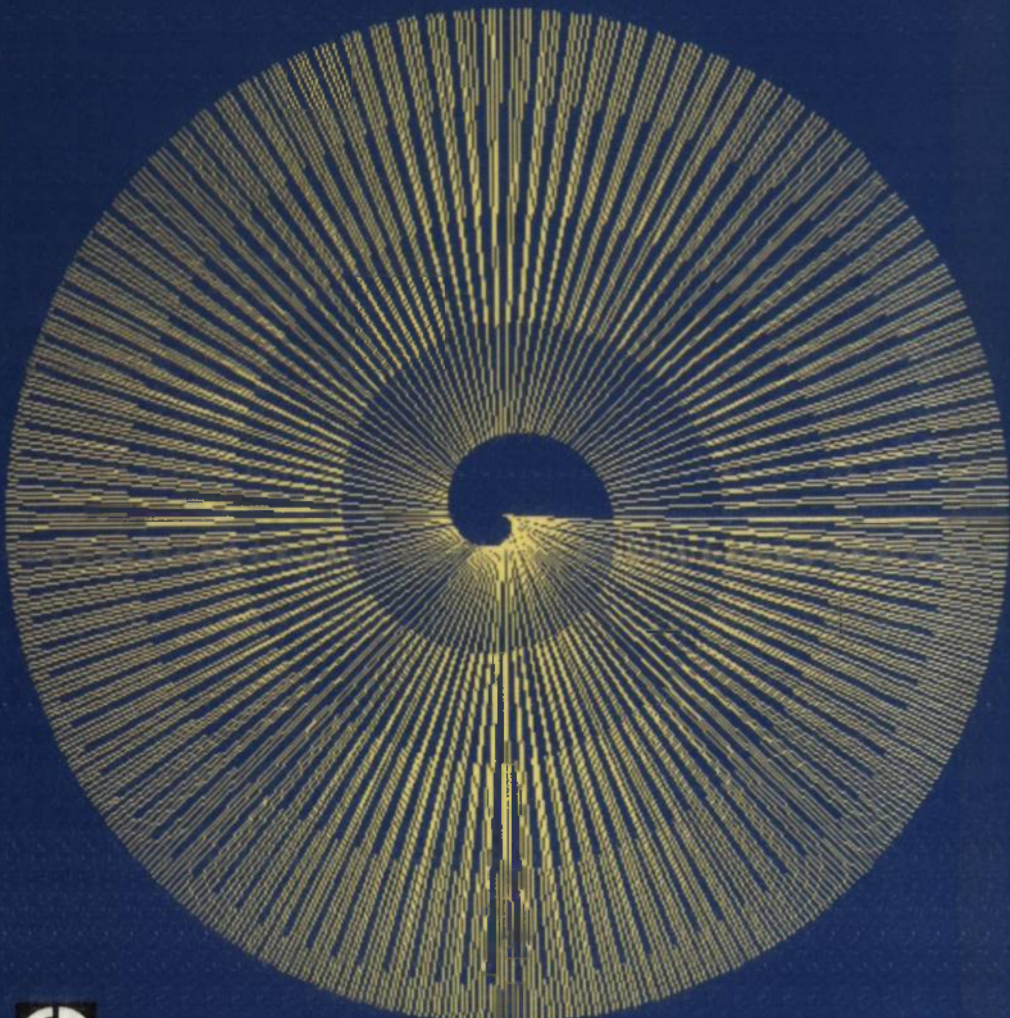
PHAN HUY THIỆN

TUYỂN TẬP BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHAN HUY THIỆN

TUYỂN TẬP
BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

805–2010/CXB/13–1301/GD

Mã số: 7B797Y0–DAI

MỤC LỤC

Trang

Chương 1
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CHUNG

Phương trình vi phân chứa các hàm số chưa biết thường gọi là biến phụ thuộc y, biến độc lập x và các đạo hàm của hàm số chưa biết (hoặc các vi phân của nó).

Nhiều hệ vật lý, hóa học và sinh học... có thể được mô tả bằng mô hình toán học. Một khi mô hình được xây dựng, ta thường phải giải một phương trình vi phân để dự báo và định lượng các tính chất và đặc trưng của hệ đã được mô hình hóa.

Nếu hàm cần tìm chỉ phụ thuộc một biến độc lập, phương trình được gọi là *phương trình vi phân thường* (ordinary differential equation – ODE). Nếu hàm cần tìm phụ thuộc vào hai hoặc nhiều biến độc lập, phương trình được gọi là *phương trình vi phân đạo hàm riêng* (partial differential equation – PDE).

Cấp của phương trình vi phân là cấp của đạo hàm cao nhất xuất hiện trong phương trình. Phương trình chỉ chứa đạo hàm dy/dx, nhưng không có đạo hàm cấp cao hơn được gọi là *phương trình vi phân cấp 1*; phương trình chứa đạo hàm d^2y/dx^2, nhưng không có đạo hàm cấp cao hơn được gọi là *phương trình vi phân cấp 2*,...

Bậc của phương trình vi phân xác định bởi số lũy thừa trong biểu thức của đạo hàm cao nhất sau khi đã biến đổi phương trình, sao cho bậc của đạo hàm chỉ chứa lũy thừa nguyên. Số lũy thừa của biến độc lập hoặc số lũy thừa của đạo hàm thấp hơn đạo hàm cao nhất không đóng vai trò xác định bậc của phương trình.

Tích phân của phương trình vi phân là một hay nhiều phương trình liên kết các hàm số chưa biết và các biến số độc lập, sao cho phương trình vi phân đã cho trở thành *đồng nhất thức* khi ta thay vào phương trình đó các hàm số chưa biết và các đạo hàm của chúng có mặt trong phương trình.

Nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân là hàm tổng quát $y(x)$ thỏa mãn phương trình. Đối với phương trình vi phân cấp 1, nghiệm tổng quát chứa một hằng số tích phân được xác định bằng các điều kiện biên thích hợp. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp n chứa n hằng số tùy ý của tích phân , vì vậy cần n điều kiện biên để xác định n hằng số này. Khi các điều kiện biên xác định được các hằng số, nghiệm tìm được gọi là *nghiệm riêng* của phương trình vi phân đã cho.

Một số phương trình vi phân cấp cao hơn 1 còn có các nghiệm kỳ dị, tức là các nghiệm không chứa các hằng số tùy ý và không thể tìm được nghiệm tổng quát.

Khi một nghiệm bất kỳ của phương trình vi phân được tìm thấy, chúng luôn luôn có thể kiểm tra bằng cách thay vào phương trình gốc và thỏa mãn điều kiện biên đã cho.

Tìm những tích phân của phương trình vi phân gọi là *phép tích phân* của nó.

Tích phân biểu diễn hàm số chưa biết qua những biến số độc lập gọi là *nghiệm* của phương trình vi phân.

Tích phân của phương trình vi phân không đơn trị, nó có thể chứa những đại lượng không đổi hay những hàm số có thể chọn một cách tùy ý.

Để xác định nghiệm đơn trị, người ta đặt cho các hàm số chưa biết các điều kiện bổ sung gọi là các *điều kiện ban đầu* (initial conditions) hoặc các *điều kiện biên* (boundary conditions) để buộc cho các hàm số chưa biết và cả một số đạo hàm của chúng phải lấy các giá trị cho trước tại những giá trị xác định của biến số độc lập. Với những điều kiện bổ sung ấy, nghiệm của bài toán sẽ đơn trị.

Một phương trình là *tuyến tính* nếu nó là bậc một và không chứa các tích của hàm cần tìm và các đạo hàm của nó. Một phương trình là *phi tuyến* nếu nó không tuyến tính.

1.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1, KHÁI NIỆM TRƯỜNG HƯỚNG

Phương trình vi phân cấp 1 có dạng tổng quát

$$F(x, y, y') = 0,\ y' = \frac{dy}{dx}, \tag{1.1}$$

nghiệm của phương trình (1.1) là hàm $y = y(x)$. Có vô số nghiệm để khi thế vào phương trình ta được đồng nhất thức. Tìm các nghiệm của phương trình (1.1) gọi là *tích phân* phương trình đó. Nếu từ phương trình (1.1) có thể rút ra y', tức là

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

thì phương trình (1.2) gọi là *phương trình vi phân cấp 1 giải ra được đối với đạo hàm.*

Nếu qua điểm $M(x, y)$ có đồ thị nghiệm $y = \varphi(x)$ của phương trình $y' = f(x, y)$ đi qua, thì hệ số góc tiếp tuyến với đồ thị tại điểm ấy (bằng dy/dx) có thể xác định trực tiếp từ phương trình vi phân. Do đó, phương trình vi phân xác định tại mỗi điểm hướng của tiếp tuyến với đồ thị của nghiệm. Tập hợp những hướng đó lập nên một *trường hướng*. Mỗi điểm cùng với hướng đã cho gọi là một *phần tử* của trường hướng.

Tích phân một phương trình vi phân cấp 1, về mặt hình học, được quy về việc nối các phần tử thành đường cong tích phân mà tiếp tuyến tại mỗi điểm có hướng trùng với hướng của trường.

Đường cong tại mỗi điểm của nó mà hướng của trường hướng không thay đổi được gọi là *đường đẳng phục*. Như vậy, phương trình đường đẳng phục có dạng $f(x, y) = c$.

Đường đẳng phục không trùng với đường cong tích phân.

Trong một số trường hợp gặp phải trường hướng, trong đó có cả những hướng thẳng đứng, tương ứng với hàm $f(x, y) = \infty$. Khi đó, có thể thay đổi vai trò của biến số phụ thuộc và biến số độc lập, tức là biến đổi đạo hàm

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

tương đương với phương trình đã cho.

Tập hợp các đường cong tích phân sẽ phụ thuộc vào một tham số. Phương trình của họ các đường cong tích phân là tích phân tổng quát của phương trình, nó chứa một hằng số tùy ý. Muốn thu được nghiệm riêng $y=\varphi(y)$ thỏa mãn $y_0=\varphi(x_0)$ từ tích phân tổng quát $F(x,y,c)=0$, ta cần xác định c từ phương trình $F(x_0,y_0,c)=0$.

1.3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP 1

Để giải phương trình tuyến tính cấp 1, ta bắt đầu với phương trình

$$\frac{dy}{dt}+p(t)y=g(t), \tag{1.3}$$

trong đó $p(t)$ và $g(t)$ là các hàm liên tục. Gọi $\mu(t)$ là thừa số tích phân. Nhân $\mu(t)$ vào hai vế phương trình (1.3), ta có $\mu(t)(dy/dt)+\mu(t)p(t)y=\mu(t)g(t)$, trong đó $\mu(t)$ được chọn sao cho $\mu'(t)=\mu(t)p(t)$, do đó phương trình được viết là

$$\mu(t)\frac{dy}{dt}+\mu'(t)y=\mu(t)g(t)\Rightarrow\left[\mu(t)y(t)\right]'=\mu(t)g(t)$$

$$\Rightarrow\int\left[\mu(t)y(t)\right]'dt=\int\mu(t)g(t)dt\Rightarrow y(t)=\frac{\int\mu(t)g(t)dt-c}{\mu(t)}.$$

Mặt khác

$$\mu'(t)=\mu(t)p(t)\Rightarrow\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}=p(t)\Rightarrow\left[\ln\mu(t)\right]'=p(t)\Rightarrow\ln\mu(t)=\int p(t)+k$$

$$\Rightarrow\mu(t)=e^{\int p(t)+k}=e^ke^{\int p(t)}=Ke^{\int p(t)}.$$

Cuối cùng ta thu được

$$\left.\begin{aligned}y(t)&=\frac{\int\mu(t)g(t)dt-c}{\mu(t)}\\ \mu(t)&=Ke^{\int p(t)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow y(t)=\frac{\int e^{\int p(t)}g(t)dt-c/K}{e^{\int p(t)}}.$$

Hoặc kết quả là

$$y(t)=\frac{\int\mu(t)g(t)dt-\alpha}{\mu(t)}. \tag{1.4}$$

trong đó α là hằng số tùy ý và

$$\mu(t)=e^{\int p(t)}. \tag{1.5}$$

Tóm lại, để giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 với hệ số là hàm số, ta thực hiện các bước sau:

1. Đưa phương trình về dạng (1.3).
2. Tìm thừa số tích phân $\mu(t)$ theo công thức (1.5).
3. Lấy $\int\mu(t)g(t)dt$, rồi thay vào (1.4).
4. Suy ra nghiệm phải tìm.

1.4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 VỚI BIẾN SỐ PHÂN LY

Xét phương trình vi phân cấp 1 phi tuyến. Loại đầu tiên trong chúng là phương trình vi phân cấp 1 có thể *phân ly biến số*, đó là một phương trình vi phân cấp 1 được viết dưới dạng

$$N(y)\frac{dy}{dx} = M(x). \tag{1.6}$$

Như vậy, phương trình vi phân cấp 1 có thể phân ly biến số là phương trình được tách thành hai phần bằng nhau, nói cách khác là, có thể tách biến được, trong đó vế trái chỉ chứa các hàm của biến y nhân với đạo hàm cấp 1 của nó, vế phải là các hàm chỉ phụ thuộc vào biến độc lập x. Phương trình được giải dễ dàng nếu viết

$$N(y)dy = M(x)dx \Rightarrow \int N(y)dy = \int M(x)dx. \tag{1.7}$$

Vì thế, sau khi tích phân ta có một nghiệm ẩn, từ đó có thể tìm được nghiệm dưới dạng hiện $y(x)$. Nhưng chú ý rằng, không phải luôn luôn tìm được nghiệm dưới dạng hiện (Nghiệm ẩn là nghiệm không thể viết được dưới dạng $y = y(x)$, trong khi đó nghiệm hiện là nghiệm viết được dưới dạng như vậy).

Cần chú ý đến khoảng xác định của biến độc lập của nghiệm, tức là miền các giá trị của biến độc lập x làm cho nghiệm có giá trị xác định. Chẳng hạn, các giá trị của nghiệm không có phép chia cho số 0, hay nghiệm không phải giá trị phức, cũng như không thể chứa logarit của số âm... Hầu hết mọi nghiệm thu được bằng phương pháp biến số phân ly không phải đều xác định được trên mọi giá trị của x.

1.5. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TOÀN PHẦN[1]

Xét phương trình vi phân có dạng

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.8}$$

Nếu tồn tại một hàm $\Psi(x,y)$, sao cho

$$\Psi_x = M(x,y),\ \Psi_y = N(x,y), \tag{1.9}$$

ta nói phương trình vi phân (1.8) là *phương trình vi phân toàn phần* (hay *phương trình vi phân hoàn chỉnh*). Do đó có thể viết phương trình vi phân (1.8) dưới dạng

$$\Psi_x + \Psi_y\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.10}$$

Theo quy tắc dây xích của đạo hàm toàn phần, ta có

$$\frac{d}{dx}\left\{\Psi\left[x, y(x)\right]\right\} = 0.$$

Nghiệm ẩn của phương trình vi phân toàn phần là tích phân tổng quát

$$\Psi(x,y) = c. \tag{1.11}$$

[1] Một số tài liệu còn gọi là phương trình vi phân hoàn chỉnh.